

Additive Endogenous Regime Switching GARCH Model*

Hyunjin Yang [†] Heejoon Han [‡] Chang Sik Kim [§]

Abstract

This paper investigates a new volatility model, in which a regime switching parameter representing a high or low volatility level is added in the GARCH(1,1) model. Importantly, the model adopts the endogenous regime switching model recently introduced by Chang et al. (2017) and the future transition between states depends on the current state as well as the realization of the underlying financial time series. Application on the U.S. monthly stock index return series shows that the endogenous regime switching mechanism improves the data fitting and forecasting of stock return volatility. Moreover, using the latent factor extracted from the model and the FRED-MD data set, we employ the adaptive LASSO method to examine which macroeconomic variables are related to stock market volatility.

Keywords Endogenous Regime Switching Model, Volatility, GARCH, Adaptive LASSO

JEL Classification C32, C50, G12

*We thank Joon Park for his valuable suggestions and discussions. We are also grateful to Yoosoon Chang and Boreum Kwak for their helpful comments.

[†]Ph.D Student, Department of Economics, Sungkyunkwan University, e-mail: curious-boy@skku.edu

[‡]Professor, Department of Economics, Sungkyunkwan University, e-mail: heejoonhan@skku.edu

[§]Corresponding Author, Professor, Department of Economics, Sungkyunkwan University, e-mail: skimcs@skku.edu

내생적 국면전환을 이용한 GARCH 모형 *

양현진[†] 한희준[‡] 김창식[§]

Abstract

본 논문은 GARCH(1,1) 모형에 변동성 수준이 높은 국면과 낮은 국면을 나타내는 모수를 추가한 새로운 모형을 분석한다. 본 연구에서는 최근 소개된 Chang et al. (2017)의 내생적 국면전환 모형(Endogenous Regime Switching Model)을 도입함으로써, 이번 기 금융 시계열의 관측치가 다음 기의 변동성이 높거나 낮은 국면을 결정하는 데에 영향을 미치는 내생성을 허용하는 특징을 지닌다. 미국의 월별 주가지수에 적용한 결과, 내생적 국면전환의 구조가 주가 수익률 변동성의 설명력 및 예측력이 향상시키는 것으로 나타났다. 또한 변동성의 수준이 높거나 낮은 국면을 결정하는 잠재변수(latent factor)를 추출하고, Adaptive-LASSO 방법을 이용하여 FRED-MD 데이터베이스의 고차원 거시경제변수들 중 어떠한 변수들이 주식시장 변동성의 설명 및 예측에 관련이 있는지를 분석한다.

Keywords 내생적 국면전환 모형, 변동성, GARCH, Adaptive LASSO

JEL Classification C32, C50, G12

*본 논문에 대해 귀중한 제안 및 논의를 해주신 박준용 교수님(Indiana University 및 성균관대학교)께 감사드립니다. 또한 본 논문에 대해 좋은 논평을 해주신 장유순 교수님(Indiana University)과 광보름 교수님(Martin Luther University of Halle-Wittenberg)께 감사드립니다.

[†]성균관대 경제학과 박사과정, e-mail: curiousboy@skku.edu

[‡]성균관대학교 경제학과 교수, e-mail: heejoonhan@skku.edu

[§]교신저자, 성균관대학교 경제학과 교수, e-mail: skimcs@skku.edu

1. 서론

금융 시장의 변동성에 대한 연구는 경제학의 주요한 연구 분야 중 하나이며 수많은 연구들이 진행되었고 계속 진행되고 있는 분야이다. 변동성은 사후(ex post)에서도 관측이 불가능하기 때문에 많은 연구에서 이를 대체하는 조건부 분산(conditional variance)을 추정하고자 하였으며, 이를 위해 다양한 구조 모델(structural model)을 사용하여 조건부 분산을 추정하였다. 그 중 가장 대표적인 구조 모델로 ARCH와 GARCH 형태의 모형이 있다. ARCH/GARCH 형태의 모형이 널리 활용되는 이유는 모형의 구조상 관측치에 대한 오차항은 존재하나 조건부 분산 내에는 오차항이 존재하지 않기 때문에 분산을 추정할 때 불확실한 충격을 반영할 필요 없이 현재의 정보를 사용하여 다음 기의 조건부 분산을 쉽게 추정할 수 있기 때문이다. 따라서 GARCH 형태의 모형은 현재의 정보만 가지고 있다면 다음 기의 변동성을 쉽게 예측할 수 있는 예측가능성을 지니고 있으며, 이런 측면에서 결정적(deterministic) 변동성 모형이라고 할 수 있다.

ARCH/GARCH 형태의 결정적 모형에 확률적(stochastic) 측면을 도입하고자 국면전환(regime switching) 모형을 결합하는 시도들 또한 활발히 이루어져 왔다. 가장 대표적인 국면전환 모형으로는 Hamilton (1989)의 연구로 시작된 마코프 국면전환 모형(Markov regime switching model)이 있으며 전기의 상태 변수와 전이확률(transition probability)에 의해 현재 상태가 결정된다는 점에서 확률적 모형이라고 할 수 있다. Hamilton and Susmel (1994)과 Cai (1994)는 ARCH 모형에 국면전환 모형을 결합한 국면전환 ARCH(Regime Switching ARCH) 모형을 고려했다. 금융시계열의 변동성은 지속성(persistence)이 높은 것으로 알려져 있기 때문에 ARCH 모형에 비해 높은 지속성을 설명할 수 있는 GARCH 모형을 이용하는 것이 바람직하나, ARCH 모형과 달리 GARCH 모형에 국면전환을 부여하는 것에는 어려움이 있는 것이 잘 알려져 있다. GARCH 모형의 경우 ARCH(∞) 모형으로 표현될 수 있는 구조를 가지기 때문에 국면전환을 모형에 도입할 경우 과거 모든 시기의 상태변수를 반영해야 하는데 이는 현실적으로 불가능하기 때문이다. 이후 Gray (1996)가 이러한 문제를 해결하는 국면전환 GARCH(Regime Switching GARCH) 모형을 처음 제시하였고 Klaassen (2002)은 이를 수정하여 발전시켰다. 금융시계열의 변동성은 장기 메모리(long memory) 특성을 나타내는 것으로 잘 알려져 있는데, Diebold and Inoue (2001)는 국면전환이 반영될 때 변동성의 장기 메모리 특성이 설명될 수 있음을 보였다.

그러나 기존의 국면전환 ARCH/GARCH 모형들의 경우 마코프 국면전환

모형을 사용하고 있으며, 마코프 국면전환 모형은 국면의 결정이 독립적으로 이루어져 이번 기에 실현되는 시계열이 다음 기의 국면에 아무런 영향을 미치지 못한다는 단점이 있다. 이러한 한계를 극복하고자 실현되는 시계열이 국면 결정에 영향을 미치는 내생성(endogeneity)을 도입하려는 시도가 Chang et al. (2017), Diebold et al. (1994), Kim et al. (2008) 등에 의해 있어왔다.

본 연구의 주요 동기는 내생성을 허용하는 국면전환 모형을 결합한 새로운 변동성 모형을 제안하고 이를 분석하는 것이다. 이는 국면의 결정이 실제 금융 시계열의 관측치에 상관없이 외생적으로 결정되는 기존 국면전환 변동성 모형들에 비해, 이번 기 금융 시계열의 관측치가 다음 기 변동성이 높거나 낮은 국면 결정에 영향을 미치는 내생성을 반영할 경우 변동성 예측력이 증가할 것으로 기대되기 때문이다. 본 연구는 최근에 소개된 Chang et al. (2017)의 내생적 국면전환 모형(Endogenous Regime Switching Model)을 GARCH 모형에 결합하는 새로운 변동성 모형을 고려하고 있는데, 구체적으로 기본 모형인 GARCH(1,1) 모형에 변동성 수준이 높은 국면과 낮은 국면을 나타내는 모수를 추가한 모형이다. Chang et al. (2017)의 모형은 자기회귀 잠재변수(autoregressive latent factor)를 이용하여 국면전환에 내생성을 반영하는데, 모형의 추정을 통해 변동성의 수준이 높거나 낮은 국면을 결정하는 잠재변수를 추출할 수 있다. 추출된 잠재변수는 변동성에 영향을 미치는 기초 경제여건(economic fundamental)을 반영하는 것으로 해석할 수 있으며, 이를 이용하여 거시경제변수들 중 어떠한 변수들이 금융시장의 변동성에 영향을 미치는지를 추가적으로 분석할 수 있는 장점이 있다.

본 연구에서는 미국 NYSE/AMEX 주식시장의 1976년 1월부터 2015년 12월까지 480개월의 월별 초과 주식 수익률을 사용하여 모형을 추정하였으며 주요 결과는 다음과 같다. 우선 모형을 추정한 결과 변동성 수준이 높은 국면과 변동성 수준이 낮은 국면이 유의하게 구별되는 것으로 추정되었으며 국면전환의 내생성 모수는 유의한 음(-)의 값으로 추정되었다. 통상적인 GARCH(1,1) 모형과 국면전환을 추가하되 내생성을 허용하지 않은 모형에 비교해 볼 때, 본 연구에서 제안한 모형이 훨씬 높은 우도 함수값을 나타내었다. 이러한 결과들은 GARCH 모형에 내생적 국면전환 구조를 추가하는 것이 적절할 뿐만 아니라 모형의 설명력을 높이고 있음을 의미한다. 또한 내생성 모수가 음의 값으로 추정된 것은 이번 기의 수익률이 음의 값일 경우(양의 값일 경우에 비해) 다음 기의 변동성이 높아지는 주식 수익률과 변동성의 비대칭성을 설명하고 있다.

둘째, 모형의 표본 외 예측(out-of-sample forecast)을 비교한 결과에서도 본 연구에서 제안하고 있는 모형이 통계적으로 유의하게 우월한 예측력을 보

이는 것으로 나타났다. 이와 같은 결과는 이번 기에 실현되는 주식 수익률이 다음 기의 변동성 수준에 영향을 미치는 내생적 국면전환의 구조가 예측력을 향상시키는 것으로 볼 수 있다.

마지막으로 모형에서 추정된 잠재변수와 실물경기 및 금융시장의 상황을 나타내는 거시경제변수들간의 관계를 분석하였다. 잠재변수는 모형에서 변동성의 수준이 높거나 낮은 국면을 결정하는 요소로써 NBER에서 정의한 경기 변동과 여러 금융위기 상황 등 주식시장의 변동성에 영향을 미치는 기초 경제여건을 적절하게 반영하는 것으로 나타났다. 이러한 잠재변수와 Federal Reserve Bank of St. Louis에서 제공하는 FRED-MD 데이터베이스의 126개 고차원 거시/금융 변수간의 관계를 Adaptive-LASSO 방법을 사용하여 확인하였다. Adaptive-LASSO 추정 결과 VXO 지수, 배당 수익률(dividend yield) 등 주식시장 관련 지수들과 5년 국채 수익률, 3개월 국채 수익률 - 페더럴 펀드 금리(federal fund rate), Canada/US 환율 등 채권/외환시장 관련 변수들뿐만 아니라 산업생산지수(Industrial Production: Residential utilities), 구인광고지수(Help-Wanted Index for United States), 실업급여신청(Initial Claims) 등 실물경기를 반영하는 변수들이 잠재변수와 관계가 있는 것으로 확인되었다. 추가적으로 이전 기의 거시경제변수들 중 통화량 관련 변수들도 다음 기의 잠재변수에 영향을 미치는 것으로 나타났다. 선택된 거시경제변수들은 주식시장 변동성에 영향을 미치는 변수들로 주식시장의 변동성 예측에 사용될 수 있을 것으로 기대된다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2장에서는 본 연구에서 제안하는 새로운 변동성 모형을 소개하고 추정방법을 설명한다. 3장에서는 모형의 실증분석을 진행하여, 구체적으로 데이터에 대한 설명, 모형의 추정 결과, 예측 실험 결과를 제시하고 모형에서 추출된 잠재변수와 거시경제변수와의 관계를 분석한다. 마지막 4장에서는 연구의 결론을 정리하였고, 부록에는 Addaptive-LASSO 방법에 사용된 126개의 거시변수를 제시하였다.

2. 모형과 추정방법

2.1. 모형

본 연구는 GARCH(1,1) 모형에 Chang et al. (2017)의 내생적 국면전환 모형을 결합한 새로운 변동성 모형을 제안하고 이를 분석한다. 본 연구에서 사용한 모형은 GARCH(1,1) 모형과 내생적 국면전환 모형을 더하는 형태인 Additive Endogenous Regime Switching GARCH(ERS-GARCH) 모형으로 아래와 같이 정의된다.

$$y_t = \sigma_t u_t \quad (1)$$

$$\sigma_t^2 = K_t(s_t) + h_t(\theta) \quad (2)$$

y_t 는 평균을 제거한 수익률이고 σ_t^2 는 y_t 의 조건부 분산으로 변동성을 의미한다. σ_t^2 는 $K_t(s_t)$ 와 $h_t(\theta)$ 를 더한 형태로 구성되어 있다. $K_t(s_t)$ 는 내생적 국면 전환 모형의 상태변수 s_t 에 의해서 결정되는 변수이며, $h_t(\theta)$ 는 GARCH(1,1) 모형을 따른다.

$$\begin{aligned} h_t(\theta) &= \beta_0 + \beta_1 y_{t-1}^2 + \beta_2 h_{t-1} \\ \beta_0 > 0, \beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0, \beta_1 + \beta_2 < 1 \end{aligned} \quad (3)$$

$h_t(\theta)$ 를 살펴보면 오차항과 같은 불확실한 정보는 없으며, 과거 관측치의 정보로만 모형이 구성되어 있음을 확인 할 수 있다. 따라서 모형의 모수인 $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ 를 알 수 있다면, 현재까지의 관측치 정보를 사용하여 다음 기의 변동성을 완벽하게 예측할 수 있다. 이처럼 관측 가능한 데이터만을 기반으로 하여 변동성을 예측할 수 있다는 측면에서 $h_t(\theta)$ 항목은 결정론적 모형으로 구분할 수 있다. 이는 전체 변동성을 구성하는 나머지 부분인 $K_t(s_t)$ 과 상반되는 특징이다.

$$\begin{aligned} \omega_t &= \alpha \omega_{t-1} + v_t \\ \alpha &\in [-1, 1], v_t =_d N(0, 1) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} K_t(s_t) &= K_t(\omega_t) = \underline{K}1\{\omega_t < \tau\} + \overline{K}1\{\omega_t \geq \tau\} \\ s_t &= 1\{\omega_t \geq \tau\} \end{aligned} \quad (5)$$

식(5)에서 식별(identification)을 위해 $\underline{K} = 0$ 을 가정한다.

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_{t+1} \end{pmatrix} =_d \mathbb{N} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \right) \quad (6)$$

국면전환 모형 부분인 $K_t(s_t)$ 의 경우 기존 연구에서 가장 많이 사용되는 두 국면(two state)을 사용하여 상태변수 s_t 가 0의 값을 가지면 변동성이 낮은 (시장이 안정적인) 국면을, 그리고 상태변수가 1의 값을 가지면 변동성이 높은 (시장이 불안정적인) 국면으로 식(5)와 같이 정의하였다. 상태변수는 잠재변수 ω_t 에 의해 결정되며, $K_t(s_t)$ 는 식(5)와 같이 잠재변수 ω_t 의 값이 역치수준(threshold) τ 보다 크거나 같을 경우 변동성이 높은 국면의 \bar{K} 값을 가지고, τ 보다 작을 경우 변동성이 낮은 국면의 $K=0$ 의 값을 가지게 된다. 결국 잠재변수 ω_t 에 의해서 $K_t(s_t)$ 값이 결정되며, 잠재변수는 식(4)에서 볼 수 있듯이 AR(1) 모형으로 정의되어 오차항 v_t 에 의해 영향을 받게 된다. 이처럼 국면전환 모형은 미래 변동성에 대한 예측이 오차항의 분포라는 불확실한 확률에 의해 결정된다는 측면에서 확률적 모형이라 할 수 있다.

내생적 국면전환 모형과 기존의 전통적인 마코프 국면전환 모형(Conventional Markov Switching Model)간의 가장 큰 차이점은 t 기에 관측된 데이터 y_t 의 오차항 u_t 와 $t+1$ 기의 잠재변수 ω_{t+1} 의 오차항 v_{t+1} 간의 상관관계 ρ 를 내생적 국면전환 모형에서 정의하고 있는 것이다. 만약 ρ 가 0이 아니라면, t 기에 실현된 y_t 의 값이 다음 기 잠재변수 ω_{t+1} 에 영향을 주며 다음 기 상태변수 s_{t+1} 에 영향을 준다. 요약하면 다음 기 상태변수 결정에 이번 기 실제 관측치가 영향을 미치게 된다. 따라서 내생적 국면전환 모형은 실현되는 관측치가 국면전환에 아무런 영향을 주지 못하는 전통적인 마코프 국면전환 모형의 한계를 극복하고 있다. 국면전환 모형에 내생성을 포함하는 효과는 이후 실증분석 결과에서 명확하게 드러나게 된다.

만약 식(6)에서 두 오차항의 상관관계인 ρ 가 0이고 식(4)의 AR(1)모형이 $|\alpha| < 1$ 인 정상성 조건을 만족한다면 상태변수가 관측 데이터에 상관없이 외생적으로 결정되므로, 전통적인 마코프 전환모형과 동일한 모형이다. 이와 같은 결과에서 내생적 국면전환 모형은 기존 모형을 확장한 모형으로 볼 수 있다. 모형에 대한 자세한 내용은 다음 절을 통해 확인할 수 있다.

변동성 관련 문헌에서 본 모형과 관련된 연구들은 다음과 같다. 우선 서론에서 언급한 Hamilton and Susmel(1994), Hamilton and Gang (1996), Gray (1996), Klaassen (2002) 등은 전통적인 마코프 국면전환 구조를 변동성 모형에 적용하고 있다. 또한 Granger and Hyung (2004)의 모형은 비록 국면전환 구조를 적용한 것은 아니나 본 연구에서 제안하는 모형과 관계가 깊다. Granger and Hyung (2004)은 통상적인 GARCH 모형의 절편에 브레이크(occasional break)를 허용하였다. 즉 변동성을 위 식(3)의 $h_t(\theta)$ 로 정의하면서 절편인 β_0 가 시기에 따라 상이한 값을 가지도록 허용하였다. Granger and Hyung (2004)은 이러한 형태의 모형이 수익률의 변동성에서 흔히 관찰되는 장기 메모리 현상을

설명할 수 있음을 보였다. 본 연구에서 제안하는 모형 또한 식(5)에서와 같이 국면에 따라 $K_t(s_t)$ 의 값이 달라지므로, Granger and Hyung (2004)의 모형과 마찬가지로 변동성 수준이 높고 낮은 시기들을 차별하여 반영할 수 있다.

2.2. 추정방법

본 연구의 모형은 Chang et al. (2017)에서 개발된 수정된 마코프 전환 필터(modified markov switching filter)를 사용하여 우도 함수를 최대화하는 추정치 $\hat{\theta}$ 를 구한다.

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax} \mathbb{L}(y_1, \dots, y_n)$$

추정에 사용되는 우도 함수는 다음과 같다.

$$\mathbb{L}(y_1, \dots, y_n) = \log p(y_1) + \sum_{t=2}^n \log p(y_t | F_{t-1}) \quad (7)$$

다 위의 식에서 F_t 는 t 기까지 관측되는 값들을 통해 얻을 수 있는 정보 집합(information set)이다. 우도 함수는 첫 번째 관측치의 확률과 나머지 관측치의 조건부 확률들의 합으로 이루어져 있다. 따라서 모든 시기의 조건부 확률을 추정할 수 있다면 우도 함수 전체를 추정할 수 있다. 각 시점 관측치의 조건부 확률은 다음과 같이 정의된다.

$$p(y_t | F_{t-1}) = \sum_{s_t} p(y_t | s_t, F_{t-1}) p(s_t | F_{t-1}) \quad (8)$$

$$p(y_t | s_t, F_{t-1}) = \mathbb{N}(0, \sigma^2) \quad (9)$$

식(8) 우변의 첫 번째 항의 경우 식(9)에서 정규분포로 가정하였기 때문에 두 번째 항인 상태변수의 조건부 확률을 각 시점마다 알 수 있다면 우도 함수 전체를 알 수 있다. 그러나 식 (6)에서 확인하였듯이 $(u_t v_{t+1})'$ 이 상관관계(ρ)를 가지므로, 기존의 국면전환 모형에서 사용하는 방식은 더 이상 사용할 수 없으며 Chang et al. (2017)에서 제시된 수정된 마코프 전환 필터를 사용하여 상태변수의 조건부 확률을 추정할 수 있다. 수정된 마코프 전환 필터는 칼만 필터(Kalman filter)와 같은 순차적 정보처리 알고리즘으로, 예측과 갱신의 알고리즘을 반복적으로 수행하여 우도 함수를 극대화하는 추정치를 도출하게 된다.

2.2.1 예측 (Prediction step)

$$p(s_t|F_{t-1}) = \sum_{s_{t-1}} p(s_t|s_{t-1}, F_{t-1})p(s_{t-1}|F_{t-1}) \quad (10)$$

$$p(s_t|s_{t-1}, F_{t-1}) = (1 - s_t)\omega_p(s_{t-1}, F_{t-1}) + s_t[1 - \omega_p(s_{t-1}, F_{t-1})] \quad (11)$$

예측에서는 t-1기까지의 정보(F_{t-1})를 활용하여 t기 상태변수의 전이확률 ($p(s_t|F_{t-1})$)을 추정한다. $p(s_{t-1}|F_{t-1})$ 의 경우 t-1기의 갱신 단계에서 추정되기 때문에, $p(s_t|s_{t-1}, F_{t-1})$ 의 전이분포를 추정하는 것이 본 단계의 주요 목적이라고 할 수 있다.

전통적인 마코프 국면전환 모형에서는 전기의 상태변수의 정보만을 사용하므로 전이확률이 시간 변화에 상관없이 전기의 상태변수에 따른 고정된 하나의 값만을 가진다. 그러나 본 모형에서는 내생성 모수가 포함되어 있기 때문에 전기의 상태변수의 정보뿐만 아니라 전기의 관측치 정보가 동시에 전이확률 추정에 반영된다. 따라서 전통적인 마코프 국면전환 모형의 전이확률과는 달리 시간 변화에 따라 전이확률이 변하게 된다.

$$\begin{aligned} & \omega_p(s_{t-1}, F_{t-1}) \\ &= \frac{\left[(1 - s_{t-1}) \int_{-\infty}^{\tau\sqrt{1-\alpha^2}} + s_{t-1} \int_{\tau\sqrt{1-\alpha^2}}^{\infty} \right] \Phi_\rho \left(\tau - \rho \frac{y_{t-1}}{\sqrt{k_{t-1} + h_{t-1}}} - \frac{\alpha x}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right) \varphi(x) dx}{(1 - s_{t-1})\Phi(\tau\sqrt{1-\alpha^2}) + s_{t-1} [1 - \Phi(\tau\sqrt{1-\alpha^2})]} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\Phi_\rho(x) = \Phi\left(x/\sqrt{1-\rho^2}\right)$$

위의 식은 $|\alpha| < 1, |\rho| < 1, \rho \neq 0$ 인 조건에서 현재 상태변수가 저국면($s_t = 0$)일 때의 전이확률을 계산한 것이다. 식에서 볼 수 있듯이 내생성 모수 ρ 가 0이 아닌 경우 전기의 관측치가 전이확률에 반영된다. 따라서 시간에 따라 관측치가 변하는 경제변수의 전이확률 또한 시간에 따라 변한다. 만약 ρ 가 0일 경우 전기의 관측치가 전이확률에 반영되지 않으므로 전통적인 마코프 국면전환 모형과 동일하게 전이확률이 고정된다. Chang et al. (2017)은 내생성 모수 ρ 가 0일 경우 내생적 국면전환 모형이 전통적인 마코프 국면전환 모형과

관측적으로 일치(observationally equivalent)함을 보였다. ρ 가 0일 경우의 전이 분포와 전이확률은 다음과 같다.

$$p(s_t|s_{t-1}) = (1 - s_t)\omega(s_{t-1}) + s_t[1 - \omega(s_{t-1})] \quad (13)$$

$$\omega(s_{t-1}) = \frac{\left[(1 - s_{t-1}) \int_{-\infty}^{\tau\sqrt{1-\alpha^2}} + s_{t-1} \int_{\tau\sqrt{1-\alpha^2}}^{\infty} \right] \Phi\left(\tau - \frac{\alpha x}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right) \varphi(x) dx}{(1 - s_{t-1})\Phi\left(\tau\sqrt{1-\alpha^2}\right) + s_{t-1}\left[1 - \Phi\left(\tau\sqrt{1-\alpha^2}\right)\right]} \quad (14)$$

내생성 모수 유무에 따라 국면전환 모형의 전이확률 추정결과가 달라지며, 국면전환 모형 부분과 GARCH 모형 부분의 미래 예측력 또한 달라짐을 추후 실증분석을 통해 확인할 것이다.

2.2.2 갱신 (Updating step)

$$p(s_t|F_t) = p(s_t|y_t, F_{t-1}) = \frac{p(y_t|s_t, F_{t-1})p(s_t|F_{t-1})}{p(y_t|F_{t-1})} \quad (15)$$

갱신에서는 t기의 관측치 y_t 를 정보 집합 F_t 에 포함하여 t기 상태변수의 전이확률 $p(s_t|F_t)$ 를 추정한다. $p(s_t|F_t)$ 는 식(10)의 예측 단계에서, $p(y_t|s_t, F_{t-1})$ 는 식(9)의 정규분포에서, $p(y_t|F_{t-1})$ 은 식(8)에서 각각 추정하였기 때문에 앞서 추정한 결과들을 결합하여 갱신 절차를 진행한다.

모든 기간에 대해 예측과 갱신의 과정을 반복하면 목적함수를 최대화하는 추정치를 얻을 수 있게 된다. 수정된 마코프 전환 필터와 기존 필터와의 관계에 대한 자세한 사항이나 본문에서 언급하지 않은 $|\alpha| = 1, |\rho| = 1$ 과 같은 특수한 경우에서의 전이확률의 추정은 Chang et al. (2017)을 참고하기 바란다.

내생적 국면전환 모형은 잠재변수 ω_t 를 추론할 수 있다는 장점을 가지고 있다. 잠재변수의 추정은 앞에서 사용한 예측과 갱신의 동일한 필터를 통해 가능하다. 예측단계에서는 t-1의 정보를 사용하여 아래와 같이 잠재변수의 분포를 도출하고,

$$p(\omega|F_{t-1}) = \sum_{s_{t-1}} p(\omega|s_{t-1}, F_{t-1})p(s_{t-1}|F_{t-1}) \quad (16)$$

$$p(\omega_t, s_{t-1} | F_t) = \frac{p(y_t | \omega_t, s_{t-1}, F_{t-1}) p(\omega_t, s_{t-1} | F_{t-1})}{p(y_t | F_{t-1})} \quad (17)$$

갱신단계에서는 t 기의 정보를 갱신하여 아래와 같이 잠재변수의 분포를 도출하게 된다.

$$p(\omega_t | F_t) = \sum_{s_{t-1}} p(\omega_t, s_{t-1} | F_t) \quad (18)$$

$$\mathbb{E}(\omega_t | F_t) = \int \omega_t p(\omega_t | F_t) d\omega_t \quad (19)$$

최종적으로 잠재변수의 기댓값(expectation)을 추정할 수 있으며, 이를 활용하여 각 시점이 어떠한 국면인지를 명시적으로 확인 할 수 있다. 더 나아가서 변동성의 국면을 결정하는 잠재변수는 수많은 경제적 요인에 의해서 결정된다고 볼 수 있으므로 이와 관련된 거시변수를 찾는다면 변동성 예측이 용이해질 것이다. 자세한 예는 다음 장의 실증분석을 통해 확인할 것이다.

3. 실증분석

3.1. 데이터 및 추정모형

모형의 실증분석에는 Center for Research in Security Price(CRSP)의 NYSE/AMEX 주식시장의 수익률 지수 데이터를 사용하였고 이는 Wharton Research Data Services(WRDS)를 통해 수집하였다. 배당금을 포함한 월별 가치비중 주식 수익률(value weighted stock returns including dividend)에서 1개월 재무성 증권 금리(treasury bill rate)로 계산한 무위험 이자율(risk free rate)을 뺀 초과 수익률(excess return)을 실증분석자료로 사용하였다. 샘플 기간은 1976년 1월부터 2015년 12월까지 480개월이다. 그림 1은 평균을 제거한 초과 수익률 그래프이다. 이를 살펴보면 다른 기간보다 초과 수익률이 큰 음의 값을 가지는 1987년 검은 월요일(Black Monday)과 2008년 글로벌 금융위기 기간을 확인할 수 있다.

ERS-GARCH 모형의 변동성 예측결과와 비교할 모형으로는 국면전환을 반영하지 않은 기본 GARCH(1,1)모형과 국면전환을 반영하되 내생성이 없는($\rho = 0$) RS-GARCH 모형을 채택하였다. 두 모형들과의 비교를 통해 변동성을 모형화할 때 국면전환을 반영하는 효과와 국면전환에 내생성을 포함하는

효과를 각각 확인하였다. 모든 모형은 최우 추정법을 통해 추정하였으며, RS-GARCH 모형과 ERS-GARCH 모형은 수정된 마코프 전환 필터를 사용하였다.

3.2. 추정결과

이번 절에서는 모형들의 추정결과를 살펴보고 모형간의 차이를 비교해 보고자 한다. GARCH 모형을 제외한 두 모형의 경우 모수의 추정에 앞서 프로파일 우도함수(profile likelihood)를 먼저 추정하는 것이 바람직하다. 이는 내생적 국면 전환 모형과 같은 복잡한 형태의 비선형 모형의 경우 수치적 최적해(numerical solution)를 구하는 과정에서 민감한 모수의 초기 값에 따라 최우값의 전역 최대치(global maximum)를 구하지 못하고 국지 최대치(local maximum)를 구하는 경우가 발생할 수 있기 때문이다. 따라서 프로파일 우도함수를 추정하여 초기 값에 따른 최우값의 결과를 살펴보고 전역 최대치를 확인하는 것이 바람직하다. ERS-GARCH 모형의 경우 초기 값에 민감한 모수인 (α, ρ) 의 값을 각각 -0.9에서 0.9까지 0.1 간격으로 값을 변환하였고, 극단 값을 반영하기 위해 0.99, 0.9999, -0.99, -0.9999의 네 가지 값을 또한 반영하여 23×23 의 총 529개의 (α, ρ) 의 조합에서 프로파일 우도함수를 추정하였다. ERS-GARCH 모형의 프로파일 우도함수의 결과는 그림 2에서 확인할 수 있으며 $(\alpha, \rho) = (0.9, -0.9999)$ 일 때 가장 높은 우도 값을 나타내고 있다. 이 값들을 초기 값으로 설정하여 모형을 추정한 결과는 표 1에 제시되어 있다.

표 1의 결과에서 국면전환과 관련된 추정치들을 먼저 살펴보면, ERS-GARCH 모형에서 \bar{K} 는 0.0030으로 추정되어 1% 유의수준에서 유의하였으나 RS-GARCH의 경우에는 0.0086으로 10% 수준에서도 유의하지 못한 것으로 나타났다. 이러한 추정 결과는 ERS-GARCH 모형에서 변동성의 수준이 높고 낮은 두 국면을 반영하고 있음을 보여준다. ERS-GARCH 모형은 변동성이 낮은 국면에서 GARCH 부분만으로 주가 수익률의 변동성을 충분히 설명하며, 변동성이 높은 국면에서는 \bar{K} 를 통해 추가적인 변동성 증가분을 반영하는 메커니즘을 보여준다. 잠재변수의 지속력을 설명하는 자기상관 계수 α 의 경우 ERS-GARCH 모형에서는 0.8783로 추정되고 1% 유의수준에서 유의하였으나, RS-GARCH 모형에서는 0.5287로 추정되고 10% 유의수준에서도 유의하지 못한 것으로 나타났다. ERS-GARCH 모형의 내생성 모수 ρ 는 -0.9999으로 추정되어 1% 유의수준에서 유의함을 확인할 수 있다. 음수로 추정된 내생성 모수를 주식시장의 상황에서 해석해보자면, 만약 t 기의 주가 수익률에 음(-)의 충격이 가해지게 되면 $t+1$ 의 잠재변수에 양(+)의 충격으로 이어지며 이는 다음 기 변동성을 증가시키는 결과를 가져올 수 있다. 주식시장에서 음의 수익률이 발생할 때 (양의 수익률이 발생할 때에 비해) 다음 기 변동성이 더욱 커지는 경향은 널리

잘 알려져 있으며 이러한 현상은 지렛대 효과(leverage effect)라 불리고 있다. ERS-GARCH 모형에서 내생성 모수가 음(-)의 값으로 추정되는 것은 이러한 지렛대 효과를 반영하고 있음을 보여준다.

다음으로 GARCH 부분의 추정치를 살펴보면, β_1 의 경우 ERS-GARCH 모형에서는 0.0249로 다른 모형들에 비해 낮게 추정되었으며, RS-GARCH 모형에서는 0.0625, 기본 GARCH 모형에서는 0.1098로 각각 추정되었다. β_2 의 경우 ERS-GARCH 모형에서는 0.8956으로 다른 모형들에 비해 다소 높게 추정되었으며, RS-GARCH 모형에서는 0.8744, 기본 GARCH 모형에서는 0.8672로 각각 추정되었다. 흔히 GARCH 모형에서는 변동성의 지속성을 나타내는 정도로 $\beta_1 + \beta_2$ 를 살펴보는데, ERS-GARCH 모형에서는 $\beta_1 + \beta_2$ 이 0.9205, RS-GARCH 모형에서는 0.9369, 기본 GARCH 모형에서는 0.9770임을 확인하였다. 그러나 이러한 결과를 통해 기본 GARCH 모형이 설명하는 변동성의 지속성이 ERS-GARCH 모형보다 훨씬 크다고 결론을 내리는 것은 적절하지 않다. 주가 수익률의 변동성은 장기 메모리 특성을 나타내는데, 변동성 모형 문헌에서 잘 알려진 바와 같이 GARCH 모형은 이를 설명할 수 없다. 반면 앞장에서 설명하였듯이 ERS-GARCH 모형과 같이 GARCH 모형에 국면전환이 반영되거나 또는 GARCH 모형의 절편의 값이 변하는 모형들은 장기 메모리 특성을 설명할 수 있는 것으로 알려져 있다. ERS-GARCH 모형은 \bar{K} 를 통해 변동성의 장기 메모리 측면을 설명하고 있기 때문에 $\beta_1 + \beta_2$ 의 추정치가 기본 GARCH 모형에 비해 낮아진 것으로 볼 수 있다. 한편 ERS-GARCH 모형의 β_1 추정치가 기본 GARCH 모형의 추정치에 비해 작은 이유는 ERS-GARCH 모형의 경우 국면전환 모형에 내생성을 허용함으로써 과거 관측치 데이터 y_{t-1} 의 정보가 상태변수에 반영되어 국면전환 모형과 관련된 부분에 미래에 대한 예측가능성이 증가하게 되고 상대적으로 GARCH 부분의 예측가능성이 감소한 것으로 해석할 수 있다.

모형들의 우도값(log likelihood value)을 살펴보면, 기본 GARCH 모형이 가장 낮고(849.55), RS-GARCH 모형이 GARCH보다 높으며(862.54), ERS-GARCH 모형이 세 모형중 가장 높은 것(871.46)으로 나타났다. 이는 GARCH 모형에 국면전환 모형을 반영하는 것이 설명력을 높이며 특히 국면전환에 내생성을 포함할 때 설명력이 가장 높아진다는 것을 의미한다. 추정된 결과를 요약해보면 전통적인 마코프 국면전환 모형과 GARCH 모형이 합쳐진 RS-GARCH 모형의 경우, 국면전환 모형의 추정치들이 전반적으로 유의하지 않았고 GARCH 부분이 상대적으로 높은 설명력을 보였다. 반면 내생성을 포함한 ERS-GARCH 모형의 경우 상대적으로 GARCH 부분의 설명력이 낮아지고 내생적 국면전환 부분의 설명력이 높아지는 결과를 확인 할 수 있었다. ERS-

GARCH 모형은 변동성 수준이 낮은 국면일 때는 GARCH 부분에 의해서만 변동성을 설명하고 변동성 수준이 높은 국면일 때는 내생적 국면전환 부분과 GARCH 부분이 동시에 반영되어 변동성 추세를 현실적으로 설명하는 장점이 있다.

그림 3은 글로벌 금융위기가 발생한 2008-2009년 기간 동안 수정된 마코프 전환 필터를 사용하여 추정된 현재 정보 하에서 변동성 수준이 높은 국면일 확률 $p(s_t = 1|F_t)$ 을 보여준다. 내생성을 반영하지 않은 RS-GARCH의 경우 글로벌 금융위기가 발생한 2008년 10월에만 확률이 높게 추정되며 나머지 기간에는 낮은 것을 확인 할 수 있다. 따라서 RS-GARCH 모형에서 추정된 변동성 수준이 높은 국면일 확률은 NBER에서 발표한 경기 수축기를 거의 설명하지 못하는 것을 확인 할 수 있다. 반면 ERS-GARCH 모형의 경우 글로벌 금융위기 기간동안 변동성 수준이 높은 국면일 확률이 높게 추정되었으나, 경기 수축기가 끝나는 2009년 5월에 0.18로 급격하게 낮아짐을 확인 할 수 있다. 이는 ERS-GARCH 모형이 경기상황의 변화를 적절하게 반영하였기 때문에 경기 수축기가 끝나는 시점에서 변동성 수준이 높은 국면일 확률이 빠르게 감소하였다고 볼 수 있다.

3.3. 예측력 평가 기준 및 결과

앞 절에서는 전체 샘플기간의 추정 결과 우도값의 비교를 통해 ERS-GARCH 모형이 가장 높은 설명력을 지니고 있음을 보였다. 본 절에서는 표본 외 예측을 비교하고 있다. 우선 모형들의 변동성 예측력을 평가하기 위해서는 예측치와 비교할 실제 변동성의 값이 필요하다. 그러나 현실에서 실제 변동성의 관측은 불가능하기 때문에 이를 대체하기 위한 대응치가 필요하고 본 연구에서는 관련 문헌에서 일반적으로 사용하는 실현 변동성(realized volatility)을 대응치(proxy)로 사용하였다. 월별 실현 변동성은 해당 월(month)의 일별(daily) 수익률의 제곱을 더하여 구한 것으로 관련 문헌에서 실현 분산(realized variance)으로 명명한다. 모형에서 구한 변동성 예측치와 실현 변동성 간의 차이를 평가하기 위한 예측 손실함수(forecast loss function)으로는 QLIKE 손실함수(QLIKE loss function)를 채택하였다. 변동성 예측 및 평가와 관련된 문헌에서 잘 알려진 것처럼, 실제 변동성이 아니라 이에 대한 대응치를 사용하기 때문에 측정오차(measurement error)가 존재하고 이로 인해 예측력 평가의 결과가 왜곡될 수 있다. 이를 방지하기 위해 측정오차에 강건한 손실함수(robust loss function)을 사용할 필요가 있다는 점이 Hansen and Lunde (2006)과 Patton (2011) 등에 의해 잘 알려져 있다. 특히 Patton and Sheppard (2009)는 시뮬레이션을 통해 강건한 손실함수들 중 QLIKE 손실함수의 가장 높은 파워(power)를 지니고

있음을 보였다. QLIKE 손실함수는 다음과 같이 정의된다.

$$L(\widehat{\sigma}_t^2, \sigma_t^2) = \frac{\sigma_t^2}{\widehat{\sigma}_t^2} - \log \frac{\sigma_t^2}{\widehat{\sigma}_t^2} - 1$$

여기서 $\widehat{\sigma}_t^2$ 는 각 모형이 예측한 변동성이며, σ_t^2 는 실현 변동성을 나타낸다. QLIKE 손실함수는 t기마다 구할 수 있으며 이를 평균한 값을 사용한다. 각 모형에서 예측한 변동성을 사용하여 QLIKE 손실함수를 계산하여 가장 작은 값을 가진 모형이 예측력이 가장 좋다고 해석할 수 있다.

다음으로 각 모형의 QLIKE 값의 차이가 유의한지 살펴보기 위해서 Diebold-Mariano-West 검정(DMW test)을 시행하였다. DMW 검정은 쌍별 비교(pair-wise comparison)방식으로 두 모형에서의 손실함수의 차이를 정의한 후, 유의미한 차이가 없다는 귀무가설 하에서 검정통계량이 점근적으로 표준정규분포를 따른다고 알려져 있다.

$$d_t = L(\widehat{\sigma}_{1t}^2, \sigma_t^2) - L(\widehat{\sigma}_{2t}^2, \sigma_t^2)$$

$$H_0 : \mathbb{E}(d_t) = 0$$

$$\text{Test statistic DMW} = \frac{\sqrt{T} \overline{d_T}}{\sqrt{AVar(\sqrt{T} \overline{d_T})}} \rightarrow N(0, 1)$$

$$\overline{d_T} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^n d_t$$

위 식에서 AVar은 점근 분산(asymptotic variance)의 의미이며 Newey-West의 HAC 추정치를 통해 추정되고 시차는 $[T^{1/3}]$ 으로 설정한다.

본 연구에서는 표본 외 예측력 검정을 시행하여 각 모형의 QLIKE 손실함수의 평균값을 구하고, DMW 검정을 시행하여 통계량의 유의수준을 확인하였다. 표본 이동 예측법(rolling window forecasting procedure)을 사용하여 다음 기 표본 외 예측(one-step ahead out-of-sample forecast)을 실행하였는데, 420개월을 시간창(time-window)으로 설정한 후 마지막 60개월(5년)의 변동성을

예측하였다. 예를 들면 1976년 1월부터 2010년 12월까지 420개월의 데이터를 사용하여 모형을 추정한 후 그 다음 기인 2011년 1월의 변동성을 예측하고, 1976년 2월부터 2011년 1월까지 데이터를 사용하여 2011년 2월의 변동성을 예측한다. 이를 반복적으로 시행하여 2011년 1월부터 2015년 12월까지 60개월(5년)의 표본 외 변동성의 예측치를 구하였다. 각 모형의 표본 외 예측치를 통해 구한 QLIKE 값과 DMW 검정통계량은 표 2에서 확인 할 수 있다.

표 2의 결과를 살펴보면 ERS-GARCH 모형의 QLIKE 손실함수가 0.0685로 가장 작은 값을 가졌고, 다음으로 RS-GARCH 모형이 0.0846 값을 가졌으며, GARCH 모형이 0.0871로 가장 높게 나타났다. 가장 작은 QLIKE 손실함수 값을 가진 ERS-GARCH 모형을 기준으로 DWM 검정 통계량을 살펴본 결과 RS-GARCH 모형에 대해서는 10% 유의수준에서 예측력이 동일하다는 귀무가설을 기각하였으며, GARCH 모형은 1% 유의수준에서 귀무가설을 기각하였다. 이러한 결과는 ERS-GARCH 모형이 국면전환의 내생성을 반영하고 있기 때문에 타 모형들에 비해 통계적으로 유의하게 우월한 예측력을 지니고 있음을 보여준다.

3.4. 잠재변수와 거시변수간의 관계

본 절에서는 변동성 국면을 결정하는 잠재변수를 어떠한 거시/금융 변수들이 설명할 수 있을 것인가에 관한 논의를 하고자 한다. 변동성 국면전환 모형에서 추정된 잠재변수는 변동성에 대해 관측 가능한 내재적인 정보를 포함하고 있다. 그림 4는 ERS-GARCH 모형에서 추정된 잠재변수로 확인한 높은 변동성 국면과 NBER에서 발표한 경기 수축기를 비교한 그래프이다. 그래프에서 볼 수 있듯이, 모형에서 추정한 높은 변동성 국면과 NBER에서 발표한 경기 수축기가 겹치는 것을 확인 할 수 있으며, 검은 월요일과 같은 NBER에서 설명하지 않는 경제 상황에 대해서도 설명하는 것을 확인할 수 있다.

본 연구에서는 추정된 잠재변수를 설명할 수 있는 주요 거시/금융 변수들을 찾아내어 그들과 잠재변수와의 관계를 분석하고, 이를 이용하여 변동성의 국면전환을 대표적인 거시/금융 변수에 연결시켜 보려고 한다. 이를 위해 Chang and Kwak(2018)에서와 같이 Federal Reserve Bank of St. Louis에서 제공하는 FRED-MD 데이터베이스의 거시변수를 이용한다. 이 데이터는 McCracken and Ng (2016)에서 잘 설명되었듯이 Stock and Watson (2012, 2014), Bernanke and Boivin (2003) 등의 많은 선행연구에서 제시되었던 빅데이터 실증 분석에서 가장 대표적으로 쓰이는 데이터베이스이다. Stock and Watson (2005, 2006)에서 제시되었던 14개 분류의 132개 변수를 Global Insights Basic Economics Database (GSI)에서 구성하였고 이는 흔히 Stock-Watson 데이터

라고 불릴 만큼 상징적인 월별 거시변수 데이터베이스가 되었다. 본 연구에서는 Ludvigson and Ng (2011)에서 추후에 업데이트한 8개 분류를 적용하여 FRED-MD 변수를 이용하려고 한다. FRED-MD는 월별로 계속해서 갱신이 이루어지며, 본 연구에서는 제공하는 데이터에서 모형 추정기간과 동일한 기간 동안 관측치가 제공되는 데이터를 선택하여 총 126개의 거시경제변수를 사용하였다. 각 거시변수는 총 8개의 집단으로 구분되어 산출량과 소득(Output and income), 노동시장(Labor market), 주거(Housing), 소비·주문·재고(Consumption, orders, and inventories), 통화와 신용거래(Money and credit), 이자율과 환율(Interest and exchange rates), 가격(Prices), 주식 시장(Stock market)으로 이루어져 있다.

본 논문에서는 Chang and Kwak (2018)에서와 같이 가장 대표적인 shrinkage regression의 추정법으로 쓰이는 Adaptive LASSO(Least Absolute Shrinkage and Selection Operator)를 활용하여 변동성 모형의 잠재변수를 가장 효과적으로 설명할 수 있는 거시/금융변수를 찾고자 한다. Tibshirani (1996)는 모형 복잡성(model complexity)에 l_1 페널티를 주어 회귀계수의 희소성(sparsity)을 주는 LASSO(Least Absolute Shrinkage and Selection Operator)방식을 제시하였다. Zou (2006)는 Adaptive LASSO를 제시하고 이 추정방법이 오라클(Oracle) 성질을 가져서 선택된 회귀변수들이 진성 회귀식(True Regression)에 포함된 것이라는 것을 보였다.

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta} (y - X\beta)'(y - X\beta) + \lambda \sum_{i=1}^N \frac{|\beta_i|}{|\hat{\beta}_i|}$$

위의 식과 같이 Adaptive LASSO는 l_1 -벌점화 추정법(penalized estimation)을 사용한 방법으로 OLS(ordinary least squares regression)에 벌점(penalty)을 추가하여 일반화모수(regularization parameter) λ 가 0이 되면 OLS 결과가 나타나며, λ 가 커질수록 상관관계가 적은 β_i 는 0으로 수렴하여 높은 상관관계를 가진 최적의 변수를 선택하는 방법이다. 기존의 LASSO와 가장 큰 차이점은 조정 가중치로 $|\hat{\beta}_i|$ 이 추가된 점이며, $\hat{\beta}_i$ 은 OLS 추정치나 ridge 추정치 등을 사용한다. 이 가중치는 계수의 참값이 크면 클수록 크게 되어 종속변수를 잘 설명하는 변수에는 적은 페널티를 주게 되는 장점이 있고, 이러한 가중치를 사용함으로써 오라클 성질을 만족하게 된다. Adaptive LASSO를 추정하기 위해서는 적절한 일반화모수 λ 를 선택하여야 하며, 본 논문에서는 아래와 같이 베이저안 정보 기준(Bayesian Information Criterion)을 최소화하는 λ 를 선택하였다.

$$BIC(\lambda) = \| (y - X\beta(\lambda)) \|^2 + df(\lambda)\log(n)$$

본 연구에서는 현재의 정보를 사용한 잠재변수($\mathbb{E}(\omega_t|F_t)$), 전기의 정보를 사용한 잠재변수($\mathbb{E}(\omega_t|F_{t-1})$)와 거시/금융 변수를 Adaptive LASSO 방법을 사용하여 두 변수간의 동시적(contemporaneous) 상관성 혹은 유의미한 인과관계를 살펴보려고 한다.

먼저 현재 t시점까지의 정보를 이용해서 추정한 잠재변수($\mathbb{E}(\omega_t|F_t)$)와의 관계가 유의한 거시경제변수들을 표 3에서 확인할 수 있다. Adaptive LASSO 방법을 통해 국면전환 모형의 잠재변수와 연관이 있는 8개의 거시/금융 변수가 선택되었다. 선택된 변수들의 8개 분류중 이자율과 환율, 혹은 주식시장 관련 변수만이 선택된 것이 아니라 산출량과 소득, 혹은 노동시장과 관련된 거시변수도 선택되었음을 확인할 수 있고 이는 주식시장의 변동성 국면 결정의 요소에는 금융시장과 현물시장 주요 변수 모두 강한 상관관계가 있음을 보여준다.

Adaptive LASSO 방법을 통해 선택된 거시/금융 변수 중 가장 큰 OLS 추정치를 가져 잠재변수의 현재 수준을 가장 잘 설명하는 VXO는 CEOE(Chicago Board Options Exchange)에서 발표하는 내재변동성(implied volatility) 지수이다. VXO지수는 S&P 100 옵션 데이터를 사용하여 만들어지며, CEOE에서는 1986년부터 자료를 제공하고 있다. 1986년 이전 데이터의 경우 Bloom (2009)의 논문에서 일별 S&P 500 지수를 사용하여 만든 실현변동성 자료이다. 그림 5는 Bloom (2009)에서 보여준 NBER에서 발표하는 경기 수축기와 VXO, ERS+GARCH에서 추정된 잠재변수를 동시에 보여주는 그림이다. 그림에서 확인할 수 있듯이 VXO와 잠재변수가 비슷한 움직임을 보이고 있으며, VXO가 상승한 구간과 잠재변수가 상승한 구간이 일치함을 확인할 수 있어 OLS 추정치가 양의 부호를 가지게 됨을 예상할 수 있다. VIX와 마찬가지로 VXO 또한 주식시장의 위험을 예측하는 공포지수(fear factor)로 해석되고, 모형에서 추정된 잠재변수가 주식시장의 공포지수와 같은 방향으로 움직이므로 변동성 국면모형에서 추정된 잠재변수는 공포지수로 설명될 수 있다.

S&P 배당수익률(S&P Div Yield = (Annual Dividends Per Share / Price Per Share)*100)은 두 번째로 큰 OLS 절대값 추정치를 가지는 거시/금융 변수이다. 변수의 역사적인 변화를 살펴보면 1982년 S&P 500 지수의 배당 수익률은 6.7%였으나 16년이 지난 후 1998년에는 1.4%로 하락하였음을 확인할 수 있다.¹ 과거의 데이터 변화를 통해 배당수익(dividend income)에 비해서 주식 가

¹Hussman Funds - Estimating the Long-Term Return on Stocks - June 1998

격이 더 급격하게 변동하였음을 확인할 수 있으며, 배당수익률은 배당수익과 양의 상관관계보다 주식가격과의 음의 상관관계가 더 높을 것임을 예상할 수 있다. 따라서 주식가격이 상승하는 추세가 있는 호황기의 경우 일반적으로 배당수익률은 하락하게 되고 시장의 변동성은 작아지므로, 배당수익률과 내재적인 변동성 국면전환 모형의 잠재변수는 양의 상관관계를 가지게 된다.

채권시장 및 외환시장과 관련된 변수로서 5-Year Treasury Rate, 3-Month Treasury C Minus FEDFUNDS, Canada/U.S. Foreign Exchange Rate이 잠재변수의 움직임을 설명하는 변수로 선택되었다. 미국 국채 수익률들은 OLS 추정 결과 양의 값이 나왔으며 환율의 경우 음의 추정결과가 나왔다. 먼저 중장기 국채 수익률 또는 정책금리 대비 3개월 국채 수익률이 상승할 경우, 향후 중앙은행이 정책금리를 인상할 것으로 주식시장 참가자들이 기대함에 따라 주식시장의 변동성이 높아질 수 있다. 따라서 국채 수익률과 잠재변수 간에 양의 상관관계가 나타나게 된다. 반면 캐나다/미국의 환율이 상승한다는 것은 미국 달러화가 강세를 보인다는 것으로 미국의 경제상황이 견고한 경우이며 미국 주식시장의 변동성은 낮은 상황으로 예상할 수 있다. 따라서 캐나다/미국의 환율과 잠재변수는 음의 상관관계를 가지고 있다고 추론할 수 있다. 미국과 캐나다의 관계를 살펴보면 2016년 캐나다의 외국인직접투자(FDI)의 약 45%²가 미국이고, 2018년 캐나다 수출의 74% 그리고 수입의 64%³가 미국과의 무역에서 발생하는 것으로 나타났다.

그 외에 선택된 변수들로는 현물시장과 관련된 Industrial Production: Residential utilities, Help-Wanted Index for United States, Initial Claims 변수로 산업생산지수, 구인광고지수, 실업급여신청과 관련된 변수이다. 일반적으로 경기가 호황일수록 산업이 활발해지고 구인구직이 증가하며 실업은 감소하기 때문에 앞의 두 변수들은 증가하는 추세를 가지며 실업급여신청은 감소하게 된다. 경기가 호황이고 안정적인 상황에서는 주식시장은 낮은 변동성 국면에 있을 확률이 높으므로 잠재변수의 값 또한 낮아지게 된다. 따라서 산업생산지수, 구인구직광고 거시변수와 변동성 잠재변수는 음의 상관관계를 가지며, 실업급여신청과 관련된 거시변수는 양의 관계를 가지게 된다. 이처럼 변동성 모형의 잠재 변수와 유의미한 관계가 있다고 선택된 8개의 거시/금융 변수는 모두 적절한 설명력을 가지며, 변동성 국면전환에 영향을 주는 변수라고 할 수 있다.

다음은 전기의 정보를 사용한 잠재변수($\mathbb{E}(\omega_t | F_{t-1})$)와 전기의 거시변수(X_{t-1})간의 관계를 동일한 Adaptive LASSO 방법으로 추정하였다. t-1기의 거

²<http://www.statcan.gc.ca/daily-quotidien/170425/dq170425a-eng.htm>

³<http://www.statcan.gc.ca/tables-tableaux/sum-som/l01/cst01/gblec02a-eng.htm>

시/금융변수와 t 기의 잠재변수와의 설명력을 확인해 봄으로써 거시/금융 변수의 변화에 따른 변동성 움직임의 가능성을 확인해 볼 수 있고 추후에 예측의 가능성도 분석해 볼 수 있을 것이다. 본 연구에서 선택되는 변수들을 이용한 변동성 예측 가능성은 후속 연구에서 진행하려고 한다. 전기의 거시/금융 변수의 선택 결과와 그 추정치는 표 4에서 확인 할 수 있다. 총 10개의 변수가 선택되었으며, 5개의 서로 다른 그룹에 속해 있음을 확인 할 수 있다. 위에서 설명하였던 동시적인 설명력을 가진 거시/금융변수들과 동일하거나 유사한 변수가 선택되었음을 볼 수 있으나, 추가적으로 통화와 신용거래 그룹에 속한 Real M2 Money Stock, St. Louis Adjusted Monetary Base, M2 Money Stock의 변수가 선택되었음을 확인 할 수 있다. 통화와 관련된 변수들이 추가적으로 선택된 이유는 정부의 통화 정책에 관련된 정책 변수이기 때문이다. 만약 시장이 불황일 경우 정부는 통화량을 증가시켜 경기를 회복시키려고 하는 경향이 있고 이는 주식시장의 변동성을 안정화시킬 수 있는 가능성이 존재할 것이므로 이에 따라 잠재변수와 통화 정책 변수는 음의 상관관계를 가질 수 있을 것이다.

4. 결론

본 연구에서는 내생적 국면전환 모형과 GARCH 모형을 결합한 모형을 사용하여 주식시장의 변동성을 분석하였다. GARCH 모형과 국면전환은 도입하되 국면전환의 내생성은 허용하지 않는 RS-GARCH 모형을 본 연구에서 사용한 모형과 비교한 결과, 내생적 국면전환 구조를 반영하는 것이 추가 수익률 변동성의 설명력 및 예측력을 향상시키는 것으로 나타났다. 그리고 본 연구에서는 모형의 추정을 통해 변동성의 수준이 높거나 낮은 국면을 결정하는 잠재변수를 추출할 수 있는데, 잠재변수가 주식시장의 변동성에 영향을 미치는 기초 경제여건을 적절하게 반영하는 것으로 나타났다. 특히 기존 변동성 모형들과 비교하여 주목할 점은 모형에서 추출된 잠재변수를 이용하여 주식시장의 변동성에 영향을 미치는 거시경제변수들을 식별할 수 있다는 것이다. Adaptive LASSO 방법을 적용한 결과, FRED-MD 데이터베이스의 126개 고차원 거시경제변수들 중 주식시장의 변동성과 상관관계를 가진 8개의 거시경제변수가 선택되었다. 이들 변수들 중에는 VXO 지수, 배당수익률, 국채 수익률, Canada/US 환율 등 금융시장 관련 변수들뿐만 아니라 산업생산, 구인 광고지수, 실업급여신청 등 실물경제를 반영하는 지수들도 포함되었다. 또한 잠재변수와 거시경제변수 간에 시차를 부여하여 인과관계를 적용할 경우, 총 10개의 거시경제변수들이 선택되었는데 그 중 3개의 변수는 기존 상관관계에서 선택되지 않은 통화량과 관련된 변수였다.

이처럼 선택된 거시경제변수들을 직접 이용할 경우 변동성 예측을 향상시킬 수 있을 것으로 기대되는데 이는 후속 연구에서 시도해 볼 가치가 있을 것으로 생각된다. 예를 들어, Lee and Han (2016)의 반모수 단일지수(semi-parametric single index) 변동성 모형에 채택된 거시경제변수들을 적용하여 변동성 예측력이 유의하게 향상되는지를 살펴볼 수 있을 것이다. 또한 본 연구에서는 변동성 국면을 결정하는 잠재변수와 거시/금융 변수들 간의 동시적인 관계와 시차가 존재하는 관계 등을 분석하였지만 이러한 선택변수들과 변동성 모형의 잠재변수와의 관계는 정적인(static) 분석에 국한되어 있고 동적인(dynamic) 연결고리는 설명하지 못하는 한계가 있다. Chang and Kwak(2018)에서 제안했듯이 Factor Augmented VAR등의 모형을 통해 거시/금융 변수와 잠재변수간의 동적인 분석도 후속 연구에서 가능하리라고 생각된다.

A. 부록: 표, 그림

표 1: 모형추정결과

	ERS-GARCH	RS-GARCH	GARCH
\bar{K}	0.0030***	0.0086	
α	0.8783***	0.5287	
τ	1.4248***	2.0276***	
ρ	-0.9999***		
β_0	6.42E-05*	6.91E-05	6.32E-05*
β_1	0.0249*	0.0625**	0.1098***
β_2	0.8956***	0.8744***	0.8672***
log likelihood	871.4577	862.5413	849.5509

Notes: *** : p-value < 0.01, ** : p-value < 0.05, * : p-value < 0.1

표 2: 표본 외 예측력 검정 결과

	ERS-GARCH	RS-GARCH	GARCH
QLIKE	0.0685	0.0846	0.0871
DMW		1.8998	2.6542

표 3: $\mathbb{E}(\omega_t|F_t)$ 와 선택된 거시경제변수간의 OLS 결과

Group 1: Output and income	
IP: Residential Utilities	-0.151***
Group 2: Labor market	
Help-Wanted Index for United States	-0.171***
Initial Claims	0.127***
Group 6: Interest and exchange rates	
5-Year Treasury Rate	-0.190***
3-Month Treasury C Minus FEDFUNDS	-0.117*
Canada/U.S. Foreign Exchange Rate	0.140**
Group 8: Stock market	
S&P div yield	0.328***
VXO	0.641***

표 4: $\mathbb{E}(\omega_t|F_{t-1})$ 와 선택된 거시경제변수간의 OLS 결과

Group 1: Output and income	
IP: Materials	-0.147***
Group 2: Labor market	
Civilians Unemployed for 5-14 Weeks	-0.067*
Group 5: Money and credit	
Real M2 Money Stock	-0.127***
St. Louis Adjusted Monetary Base	-0.110***
M2 Money Stock	-0.052
Group 6: Interest and exchange rates	
3-Month Treasury C Minus FEDFUNDS	-0.139***
Canada / U.S. Foreign Exchange Rate	0.111**
Group 8: Stock market	
S&P 500	-0.648***
S&P div yield	0.169
VXO	0.429***

그림 1: 평균을 제거한 초과 수익률

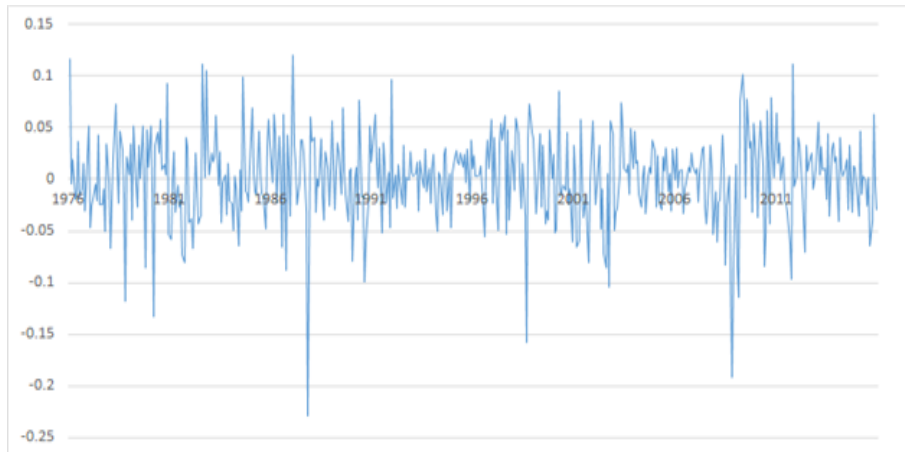


그림 2: ERS-GARCH 모형의 프로파일 우도함수

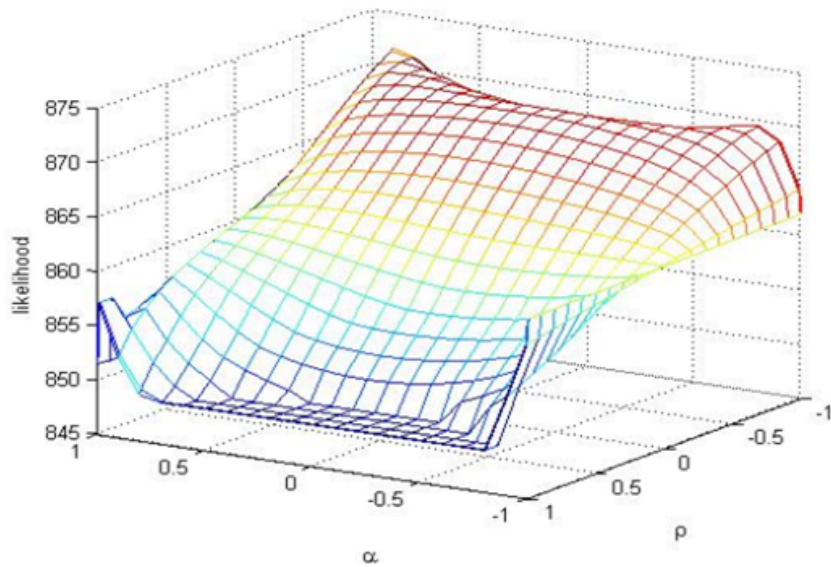


그림 3: 글로벌 금융위기 시기의 높은 국면 전이 확률 ($p(s_t = 1|F_t)$)

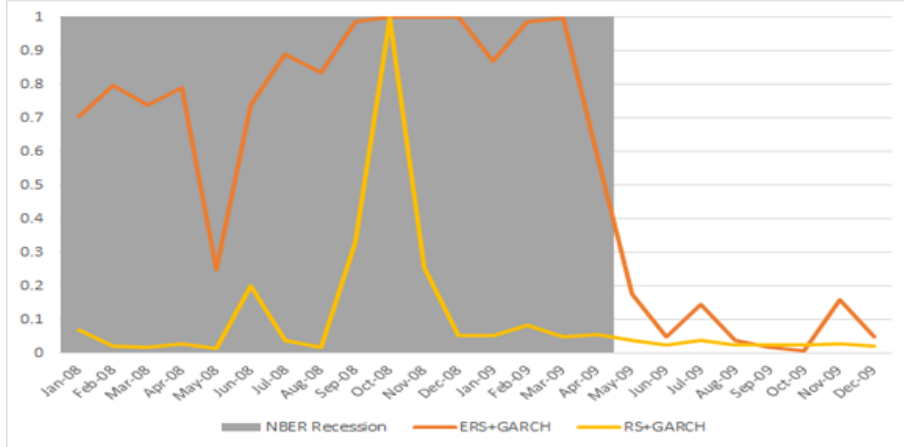


그림 4: 추정된 잠재변수, 높은 변동성 국면과 경기 수축기

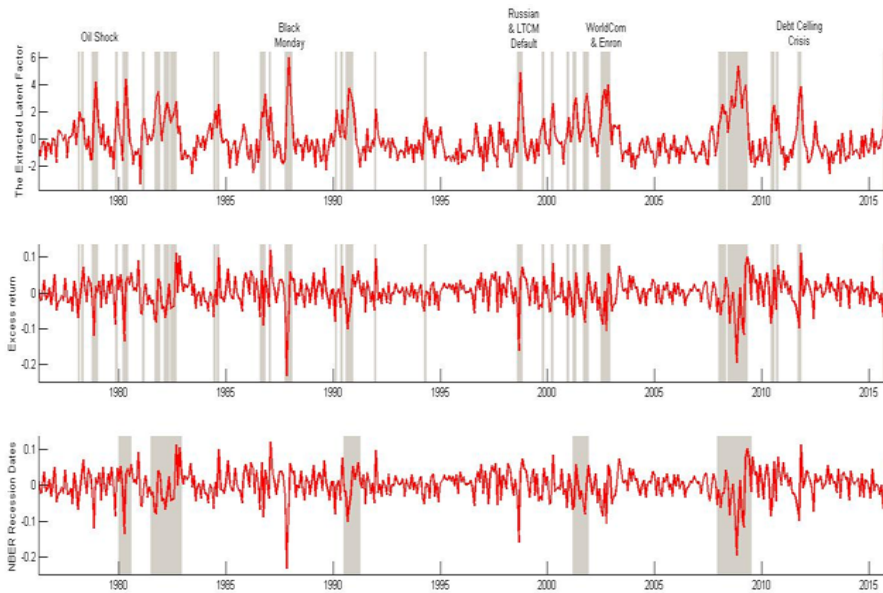
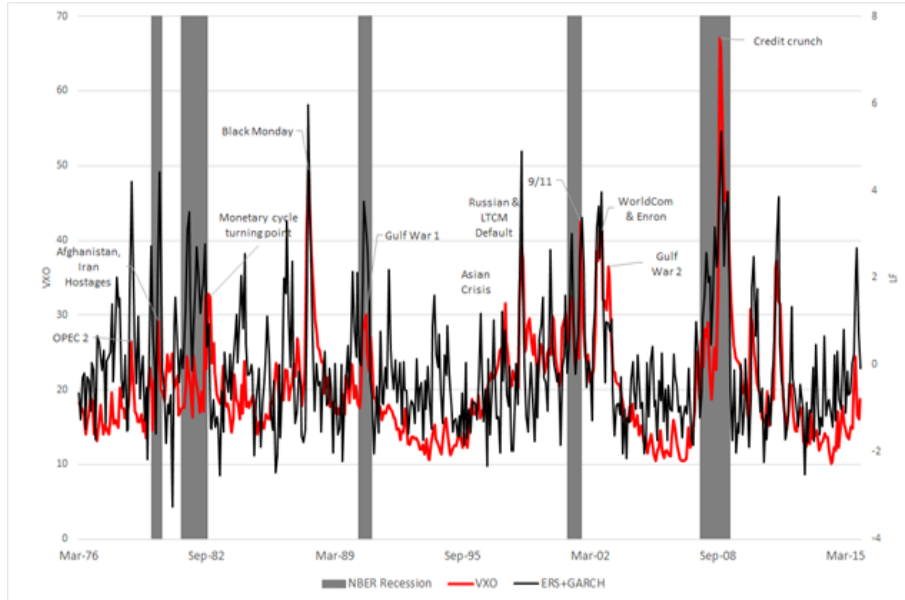


그림 5: 잠재변수와 VXO의 비교



B. 부록: 거시경제변수

다음의 부록은 본 연구에서 사용한 FRED-MD 변수에 대한 설명 자료이다. t코드는 다음의 데이터 변환을 의미한다. (1) 변환없음; (2) Δx_t ; (3) $\Delta^2 x_t$; (4) $\log(x_t)$; (5) $\Delta \log(x_t)$; (6) $\Delta^2 \log(x_t)$; (7) $\Delta (x_t/x_{t-1} - 1)$;

표 5: 산출량과 소득 (Output and income)

	변수명(fred)	t코드	설명
1	RPI	5	Real Personal Income
2	W875RX1	5	Real personal income ex transfer receipts
3	INDPRO	5	IP Index
4	IPFPNSS	5	IP: Final Products and Nonindustrial Supplies
5	IPFINAL	5	IP: Final Products (Market Group)
6	IPCONGD	5	IP: Consumer Goods
7	IPDCONGD	5	IP: Durable Consumer Goods
8	IPNCONGD	5	IP: Nondurable Consumer Goods
9	IPBUSEQ	5	IP: Business Equipment
10	IPMAT	5	IP: Materials
11	IPDMAT	5	IP: Durable Materials
12	IPNMAT	5	IP: Nondurable Materials
13	IPMANSICS	5	IP: Manufacturing (SIC)
14	IPB51222s	5	IP: Residential Utilities
15	IPFUELS	5	IP: Fuels
16	CUMFNS	2	Capacity Utilization: Manufacturing

표 6: 노동시장(Labor market)

변수명(fred)	t코드	설명
1 HWI	2	Help-Wanted Index for United States
2 HWIURATIO	2	Ratio of Help Wanted/No. Unemployed
3 CLF16OV	5	Civilian Labor Force
4 CE16OV	5	Civilian Employment
5 UNRATE	2	Civilian Unemployment Rate
6 UEMPMEAN	2	Average Duration of Unemployment (Weeks)
7 UEMPLT5	5	Civilians Unemployed-Less Than 5 Weeks
8 UEMP5TO14	5	Civilians Unemployed for 5-14 Weeks
9 UEMP15OV	5	Civilians Unemployed - 15 Weeks & Over
10 UEMP15T26	5	Civilians Unemployed for 15-26 Weeks
11 UEMP27OV	5	Civilians Unemployed for 27 Weeks and Over
12 CLAIMSx	5	Initial Claims
13 PAYEMS	5	All Employees: Total nonfarm
14 USGOOD	5	All Employees: Goods-Producing Industries
15 CES1021000001	5	All Employees: Mining and Logging: Mining
16 USCONS	5	All Employees: Construction
17 MANEMP	5	All Employees: Manufacturing
18 DMANEMP	5	All Employees: Durable goods
19 NDMANEMP	5	All Employees: Nondurable goods
20 SRVPRD	5	All Employees: Service-Providing Industries
21 USTPU	5	All Employees: Trade, Transportation & Utilities
22 USWTRADE	5	All Employees: Wholesale Trade
23 USTRADE	5	All Employees: Retail Trade
24 USFIRE	5	All Employees: Financial Activities
25 USGOVT	5	All Employees: Government
26 CES0600000007	1	Avg Weekly Hours: Goods-Producing
27 AWOTMAN	2	Avg Weekly Overtime Hours: Manufacturing
28 AWHMAN	1	Avg Weekly Hours: Manufacturing
30 CES0600000008	6	Avg Hourly Earnings: Goods-Producing
31 CES2000000008	6	Avg Hourly Earnings: Construction
32 CES3000000008	6	Avg Hourly Earnings: Manufacturing

표 7: 주거(Housing)

	변수명(fred)	t코드	설명
1	HOUST	4	Housing Starts: Total New Privately Owned
2	HOUSTNE	4	Housing Starts, Northeast
3	HOUSTMW	4	Housing Starts, Midwest
4	HOUSTS	4	Housing Starts, South
5	HOUSTW	4	Housing Starts, West
6	PERMIT	4	New Private Housing Permits (SAAR)
7	PERMITNE	4	New Private Housing Permits, Northeast (SAAR)
8	PERMITMW	4	New Private Housing Permits, Midwest(SAAR)
9	PERMITS	4	New Private Housing Permits, South(SAAR)
10	PERMITW	4	New Private Housing Permits, West(SAAR)

표 8: 소비 · 주문 · 재고(Consumption, orders, and inventories)

	변수명(fred)	t코드	설명
1	DPCERA3M086SBEA	5	Real personal consumption expenditures
2	CMRMTSPLx	5	Real Manu. and Trade Industries Sales
3	RETAILx	5	Retail and Food Services Sales
4	AMDMNOx	5	New Orders for Durable Goods
5	ANDENOx	5	New Orders for Nondefense Capital Goods
6	AMDMUOx	5	Unfilled Orders for Durable Goods
7	BUSINVx	5	Total Business Inventories
8	ISRATIOx	2	Total Business: Inventories to Sales Ratio

표 9: 통화와 신용거래(Money and credit)

	변수명(fred)	t코드	설명
1	M1SL	6	M1 Money Stock
2	M2SL	6	M2 Money Stock
3	M2REAL	5	Real M2 Money Stock
4	AMBSL	6	St. Louis Adjusted Monetary Base
5	TOTRESNS	6	Total Reserves of Depository Institutions
6	NONBORRES	7	Reserves Of Depository Institutions
7	BUSLOANS	6	Commercial and Industrial Loans
8	REALLN	6	Real Estate Loans at All Commercial Banks
9	NONREVSL	6	Total Nonrevolving Credit
10	CONSPI	2	Nonrevolving consumer credit to Personal Income
11	MZMSL	6	MZM Money Stock
12	DTCOLNVHFNM	6	Consumer Motor Vehicle Loans Outstanding
13	DTCTHFNM	6	Total Consumer Loans and Leases Outstanding
14	INVEST	6	Securities in Bank Credit at All Commercial Banks

표 10: 이자율과 환율(Interest and exchange rates)

	변수명(fred)	t코드	설명
1	FEDFUNDS	2	Effective Federal Funds Rate
2	CP3Mx	2	3-Month AA Financial Commercial Paper Rate
3	TB3MS	2	3-Month Treasury Bill:
4	TB6MS	2	6-Month Treasury Bill:
5	GS1	2	1-Year Treasury Rate
6	GS5	2	5-Year Treasury Rate
7	GS10	2	10-Year Treasury Rate
8	AAA	2	Moody's Seasoned Aaa Corporate Bond Yield
9	BAA	2	Moody's Seasoned Baa Corporate Bond Yield
10	COMPAPFFx	1	3-Month Commercial Paper Minus FEDFUNDS
11	TB3SMFFM	1	3-Month Treasury C Minus FEDFUNDS
12	TB6SMFFM	1	6-Month Treasury C Minus FEDFUNDS
13	T1YFFM	1	1-Year Treasury C Minus FEDFUNDS
14	T5YFFM	1	5-Year Treasury C Minus FEDFUNDS
15	T10YFFM	1	10-Year Treasury C Minus FEDFUNDS
16	AAAFFM	1	Moody's Aaa Corporate Bond Minus FEDFUNDS
17	BAAFFM	1	Moody's Baa Corporate Bond Minus FEDFUNDS
18	TWEXMMTH	5	Trade Weighted U.S. Dollar Index: Major Currencies
19	EXSZUSx	5	Switzerland / U.S. Foreign Exchange Rate
20	EXJPUSx	5	Japan / U.S. Foreign Exchange Rate
21	EXUSUKx	5	U.S. /U.K. Foreign Exchange Rate
22	EXCAUSx	5	Canada / U.S. Foreign Exchange Rate

표 11: 가격(Prices)

	변수명(fred)	t코드	설명
1	WPSFD49207	6	PPI: Finished Goods
2	WPSFD49502	6	PPI: Finished Consumer Goods
3	WPSID61	6	PPI: Intermediate Materials
4	WPSID62	6	PPI: Crude Materials
5	OILPRICE _x	6	Crude Oil, spliced WTI and Cushing
6	PPICMM	6	PPI: Metals and metal products:
7	CPIAUCSL	6	CPI: All Items
8	CPIAPPSL	6	CPI: Apparel
9	CPITRNSL	6	CPI: Transportation
10	CPIMEDSL	6	CPI: Medical Care
11	CUSR0000SAC	6	CPI: Commodities
12	CUUR0000SAD	6	CPI: Durables
13	CUSR0000SAS	6	CPI: Services
14	CPIULFSL	6	CPI: All Items Less Food
15	CUUR0000SA0L2	6	CPI: All items less shelter
16	CUSR0000SA0L5	6	CPI: All items less medical care
17	PCEPI	6	Personal Cons. Expend.: Chain Index
18	DDURRG3M086SBEA	6	Personal Cons. Exp: Durable goods
19	DNDGRG3M086SBEA	6	Personal Cons. Exp: Nondurable goods
20	DSERRG3M086SBEA	6	Personal Cons. Exp: Services

표 12: 주식 시장(Stock market)

	변수명(fred)	t코드	설명
1	S&P 500	5	S&P's Common Stock Price Index: Composite
2	S&P: indust	5	S&P's Common Stock Price Index: Industrials
3	S&P div yield	2	S&P's Composite Common Stock: Dividend Yield
4	S&P PE ratio	5	S&P's Composite Common Stock: Price-Earnings Ratio
5	VXOCLS _x	1	VXO

참고문헌

- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X., Labys, P. (2003). Modeling and forecasting realized volatility. *Econometrica*, 71(2), 579-625.
- Bloom, Nicholas. (2009). The impact of uncertainty shocks. *Econometrica*, 77(3), 623-685.
- Cai, J. (1994). A Markov model of switching-regime ARCH. *Journal of Business & Economic Statistics*, 12(3), 309-316.
- Chang, Y., Choi, Y., Park J. Y. (2017). A new approach to model regime switching. *Journal of Econometrics*, 196(1), 127-143.
- Chang, Y., Kwak. B. (2018). U.S. monetary-fiscal regime changes in the presence of endogenous feedback in policy rules. CAEPR working paper.
- Diebold, F. X., Inoue, A. (2001). Long memory and regime switching. *Journal of Econometrics*, 105(1), 131-159.
- Diebold, F. X., Lee, J. -H., Weinbach, G. (1994). Regime switching with time-varying transition probabilities. In Hargreaves, C. (Ed.), *Nonstationary Time Series Analysis and Cointegration*. (pp. 283-302). Oxford: Oxford University Press.
- Diebold, F. X., Mariano, R. S. (1995). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(3), 253-263.
- Granger, C. W. J., Hyung, N. (2004). Occasional structural breaks and long memory with an application to the S&P 500 absolute stock returns. *Journal of Empirical Finance*, 11(3), 399-421.
- Gray, S. F. (1996). Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process. *Journal of Financial Economics*, 42(1), 27-62.
- Hamilton, J. D. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica*, 57(2), 357-384.
- Hamilton, J. D., Lin, G. (1996). Stock market volatility and the business cycle. *Journal of Applied Econometrics*, 11(5), 573-593.

- Hamilton, J. D., Susmel, R. (1994). Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime. *Journal of Econometrics*, 64(1-2), 307-333.
- Hansen, P.R., and Lunde, A. Consistent ranking of volatility models. *Journal of Econometrics*, 131(1-2), 97-121.
- Kim, C. J., Piger, J., Startz, R. (2008). Estimation of Markov regime-switching regression models with endogenous switching. *Journal of Econometrics*, 143(2), 263-273.
- Klaassen, F. (2002). Improving GARCH volatility forecasts with regime-switching GARCH. *Empirical Economics*, 27(2), 363-394.
- Lee, S., Han, H. (2016). Adopting economic and financial variables to explain stock market volatility in Korea. *The Korean Journal of Economic Studies*, 64(2), 67-95.
- McCracken, M. W., Ng, S. (2016). FRED-MD: A monthly database for macroeconomic research. *Journal of Business & Economic Statistics*, 34(4), 574-589
- Patton, A. J. (2011). Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies, *Journal of Econometrics*, 160(1), 246-256.
- Patton A. J., Sheppard, K. (2009). Evaluating volatility and correlation forecasts. In Andersen, T. G., Davis, R. A., Kreiss, J. -P., Mikosch, Th. V. (Eds.), *Handbook of Financial Time Series*. (pp. 801-838). Berlin: Springer.
- Stock, J. H., Watson, M. W. (2002). Macroeconomic forecasting using diffusion indexes. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(2), 147-162.
- Stock, J. H., Watson, M. W. (2012). Disentangling the channels of the 2007-2009 recession. *Brookings Papers on Economic Activity*, Spring 2012, 81-135.
- Stock, J. H., Watson, M. W. (2014). Estimating turning points using large data sets. *Journal of Econometrics*, 178, 368-381.
- Tibshirani, R., (1996). Regression shrinkage and selection via the LASSO. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 58(1), 267-288.

Zou, H., (2006). The adaptive LASSO and its oracle properties. *Journal of the American Statistical Association*, 101(476), 1418–1429.